Note Title 8/31/2023

Matematici speciale Inginerie electrică restanțe toamnă 2023

Subiecte Rând I

1. Formula lui Gauss – Ostrogradski.
2. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, $D: x^2+y^2 \le 4$, $x,y \ge 0$.
3. Să se integreze $t \cdot x' + x = t^2$, $x(1) = 2$.
4. Ecuația coardei vibrante finite.
5. Să se integreze $x'' + 4x' - 5x = e^{-t}$.
6. Să se calculeze Transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\{(t + \operatorname{ch} 2t) \cdot \cos 3t\}(s) = ?$$

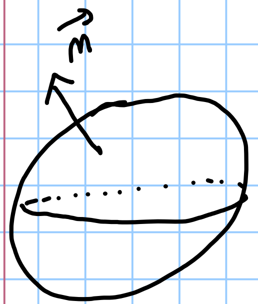
Posibilă rezolvare a subiectelor de la rândul I

1. Formula lui Gauss – Ostrogradski.

Fie $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un corp mărginit

S suprafața frontieră a corpului V care este netedă pe porțiuni

$\vec{n}$ versorul normalei la suprafața S îndreptat înspre exteriorul lui V



$\vec{v}$ câmp vectorial de clasă C^1 pe V de forma $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

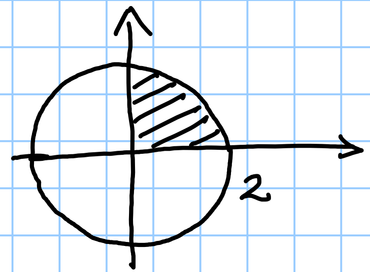
$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Atunci are loc: $$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx\,dy\,dz.$$

2. $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, $D: x^2+y^2 \leq 4$, $x,y \geq 0$.

$x^2+y^2 \leq 4$ interiorul cercului de rază 2 și centru origine

$x,y \geq 0$ primul cadran



$\Longrightarrow$ D este sfertul de disc de rază 2 aflat în primul cadran

Folosim coordonate polare $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ cu jacobianul $J = \rho$

Noul domeniu va fi $\Delta = \{(\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,2], \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$

Aceste intervale din domeniul Δ se obțin din inegalitățile domeniului inițial D înlocuind coordonatele polare:

$x^2+y^2 \leq 4 \Longleftrightarrow (\rho\cdot\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2 \leq 4 \Longleftrightarrow \rho^2\cdot\cos^2\varphi+\rho^2\cdot\sin^2\varphi \leq 4$

$$\rho^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \le 4 \iff \rho^2 \le 4 \iff \rho \le 2.$$

$$x, y \ge 0 \iff \begin{matrix} \rho\cos\varphi \ge 0 \\ \rho\sin\varphi \ge 0 \end{matrix} \xRightarrow[\text{pt că } \rho \ge 0]{} \begin{matrix} \cos\varphi \ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{matrix} \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Din calculul de mai sus $x^2+y^2=\rho^2$. Integrala va fi:

$$\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_\Delta \sqrt{4-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho$$

Notăm:

$\sqrt{4-\rho^2} = u$

$4-\rho^2 = u^2$

$-2\rho\, d\rho = 2u\, du$

$\rho\, d\rho = -u\, du$

$$\left| \begin{matrix} \rho = 0 \Rightarrow u = 2 \\ \rho = 2 \Rightarrow u = 0 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_2^0 u \cdot (-u\, du)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 u^2\, du$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Să se integreze $t \cdot x' + x = t^2$, $x(1) = 2$.

$$t \cdot x' + x = t^2 \quad \Big| : t$$

$$x' + \frac{1}{t} \cdot x = t$$ ecuație liniară. Înmulțim toată ecuația cu $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln t} = t$

$$\Rightarrow \quad t \cdot x' + x = t^2$$

$$\Rightarrow \quad (t \cdot x)' = t^2$$

prin integrare $\Rightarrow$ $$t \cdot x = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c \quad \Big| : t$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{t^2}{3} + \frac{c}{t}$$

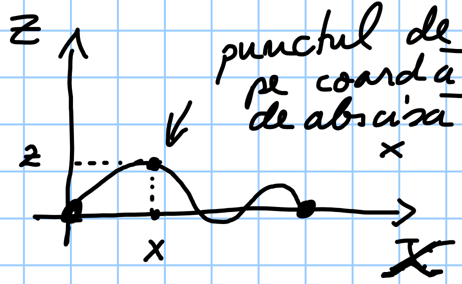
Din $x(1) = \frac{1^2}{3} + \frac{c}{1} = \frac{1}{3} + c$ și $x(1) = 2 \Rightarrow c = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5}{3t}$$

4. Ecuația coardei vibrante finite.

Avem o coardă de lungime l care vibrează în planul XOZ

$z(x,t)$ reprezintă poziția fiecărui punct de pe coardă, de abscisă x la momentul de timp t



Ecuația este: $z''_{t^2} = v^2 \cdot z''_{x^2}$, v este un parametru real

Condiții la limită: $z(0,t) = z(l,t) = 0$ coarda e fixată la capete

Condiții inițiale: $z(x,0) = f(x)$ ne arată poziția inițială a coardei

$z'_t(x,0) = g(x)$ ne arată viteza inițială în fiecare punct al coardei

Soluția ecuației este funcția $z(x,t)$.

5. Să se integreze $x'' + 4x' - 5x = e^{-t}$.

Rezolvăm mai întâi ecuația omogenă $x'' + 4x' - 5x = 0$.

Căutăm soluții de forma $x = e^{rt}$. $\Rightarrow x' = e^{rt} \cdot r \Rightarrow x'' = e^{rt} \cdot r^2$

$$\Rightarrow \quad e^{rt} \cdot r^2 + 4 \cdot e^{rt} \cdot r - 5 \cdot e^{rt} = 0 \quad \Big| : e^{rt}$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + 4r - 5 = 0 \qquad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -5 \end{matrix} \qquad ar^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36 \qquad\qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \qquad\qquad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \quad \text{și} \quad r_2 = \frac{-4-6}{2} = -5.$$

Soluția este $x_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = c_1 \cdot e^{r_1 t} + c_2 \cdot e^{r_2 t} = c_1 e^t + c_2 \cdot e^{-5t}$

Rezolvăm ecuația neomogenă $x'' + 4x' - 5x = e^{-t}$.

Pentru că $f(t) = e^{-t}$ este de forma $e^{at} \cdot Q(t)$

avem că $a = -1$ $Q(t) = 1$.

Pentru că $r = a = -1$ nu e printre soluțiile r_1 și r_2 avem $s = 0$.

Forma soluției particulare $x_p = t^s e^{at} \cdot R(t)$ unde $R(t)$ este un polinom de același grad cu Q doar că în forma generală adică $R(t) = A$, unde A este o constantă.

$\Longrightarrow$ $x_p = e^{-t} \cdot A$

Determinăm pe A din $x_p'' + 4x_p' - 5x_p = e^{-t}$.

$x_p' = -e^{-t} \cdot A$ $\quad x_p'' = e^{-t} A$ $\Longrightarrow$ $e^{-t} \cdot A - 4A e^{-t} - 5e^{-t} A = e^{-t}$

$\Longrightarrow$ $A - 4A - 5A = 1$ $\Longrightarrow$ $-8A = 1$ $\Longrightarrow$ $A = -\frac{1}{8}$ $\Longrightarrow$ $x_p = -\frac{1}{8} e^{-t}$

$\Longrightarrow$ Soluția ecuației este $x = x_0 + x_p = c_1 e^{t} + c_2 e^{-5t} - \frac{1}{8} e^{-t}.$

6. Să se calculeze transformata Laplace:

$$\mathcal{L}\{(t + ch\,2t)\cdot \cos 3t\}(s) = F(s).$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t\cdot \cos 3t + ch\,2t \cdot \cos 3t\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{t\cdot\cos 3t\}(s) + \mathcal{L}\{ch\,2t\cdot \cos 3t\}(s)$$

$$= -\left(\mathcal{L}\{\cos 3t\}(s)\right)' + \mathcal{L}\left\{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cdot \cos 3t\right\}(s)$$

$$= -\left(\frac{s}{s^2+9}\right)' + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2t}\cdot\cos 3t\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-2t}\cdot \cos 3t\}(s)$$

$$= -\left(\frac{1\cdot(s^2+9) - s\cdot 2s}{(s^2+9)^2}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 3t\}(s+2)$$

$$= -\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$= \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+9}.$$